УДК 517.95

А. И. Камышников

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются краевые задачи для одного класса уравнений, возникающих в теории распространения света в турбулентной среде. Указываются достаточные условия на коэффициенты, при которых поставленная задача без начальных данных для неклассических уравнений является корректной в пространствах С. Л. Соболева.

In this work regional tasks for one class of the equations arising in the theory of distribution of light in the turbulent environment are studied. In work sufficient conditions are indicated to coefficients at which the objective without initial data for the nonclassical equations is correct in S. L. Sobolev's spaces.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 4. С. 159 – 164.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, корректность постановки задачи, пространство С. Л. Соболева, турбулентная среда.

Key words: the equations of the mixed type, a problem definition correctness, S. L. Sobolev's space, the turbulent environment.

Уравнение вида $u_t - i(u_{xx} - u_{yy}) = f(x,y,t)$ играет важную роль в теории распространения света в турбулентной среде. Это уравнение впервые было получено в работе В.И. Татарского [1] на основе трактовки распространения света в турбулентной среде как случайного процесса марковского типа.

Начально-краевые задачи для таких уравнений изучаются в работах Б. А. Бубнова [2; 3], Н. Б. Семягина [4].

Рассмотрим в области $Q = (0,1)\times(0,1)\times(0,T)$ дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_t + i(u_{xx} - u_{yy}) + a(x,t)u = f(x,y,t), \tag{1}$$

где $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$, $t \in (0,T)$.

Относительно функций $k(x,t)$ и $a(x,t)$ будем предполагать следующее: $k(x,t)$, $a(x,t)$ — вещественнозначные, $k(x,0) \le 0$, $k(x,T) \ge 0$, $k(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,T])$, $a(x,t) \in C^1([0,1]\times[0,T])$.

Уравнение вида (1) при $k = 1$ возникает в теории распространения света в турбулентной среде.

В случае $k(x,t) \ge \delta > 0$ краевые задачи для уравнения вида (1) в неограниченных областях изучались в работах Б. А. Бубнова [2; 3], а в случае с ограниченной областью в работе Н. Б. Семягина [4].

Сформулируем краевую задачу для уравнения (1).

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = u(x,y,t)\big|_{x=1} = u(x,y,t)\big|_{y=0} = u(x,y,t)\big|_{y=1} = 0\,. \tag{2}$$

Для поставленной краевой задачи будут верна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнено с условие:* $2a - |k_t| \ge \delta > 0$.

Тогда в классе функций $u, u_t, u_{xx}, u_{yy} \in L^2(Q)$ краевая задача (1), (2) имеет единственное решение.

Для доказательства существования решения поставленной краевой задачи докажем существование и единственность решения вспомогательной задачи, полученной при использовании специального вида функций.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)\varphi_n(y)\,,$$

где $\varphi_n(y) = \sqrt{2}\sin \pi n y$, а $v_n(x,t) \in W_{2(x,t)}^{(1,2)}$ определяются как решения в области $Q = (0,1)\times(0,T)$ следующей задачи:

$$Mv_n \equiv kv_{nt} + i(v_{nxx} + \lambda_n^2 v_n) + a(x,t)v_n = f_n\,, \tag{3}$$

$$v_n\big|_{x=0} = v_n\big|_{x=1} = 0\,, \tag{4}$$

$$f_n = \int_0^1 f(x,y,t)\varphi_n(y)dy\,,\ \lambda_n^2 = \pi^2 n^2\,.$$

Наряду с задачей (4), (5) рассмотрим задачу ($\varepsilon > 0$)

$$M_\varepsilon v_{\varepsilon n} \equiv \varepsilon v_{n\varepsilon t} + v_{n\varepsilon xx} + \lambda_n^2 v_{n\varepsilon} - ikv_{n\varepsilon t} - iav_{n\varepsilon} = -if_n\,, \tag{5}$$

$$v_{n\varepsilon}\big|_{x=0} = v_{n\varepsilon}\big|_{x=1} = 0\,,\ v_{n\varepsilon t}\big|_{t=0} = v_{n\varepsilon t}\big|_{t=T} = 0\,. \tag{6}$$

Разрешимость задачи (5), (6) при каждом $\varepsilon > 0$ следует из общей теории краевых задач для эллиптических уравнений. Причем если $f_n \in W^{(0,1)}_{2(x,t)}$, то решение $v_{n\varepsilon t} \in W_2^2(Q_1)$, где $Q_1 = (0,1)\times(0,T)$.

Для задачи (5), (6) верна следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* $2a - |k_t| \ge \delta > 0$. *Тогда для решения задачи (5), (6) справедливы следующие оценки:*

$$\int_{Q_1} v_{n\varepsilon}^2 dxdt \le c_1 \int_{Q_1} f_n^2 dxdt\,,$$

$$\int_{Q_1} v_{n\varepsilon t}^2 dxdt \le c_2 \int_{Q_1} [(1+\lambda_n^4)f_n^2 + f_{nt}^2]dxdt\,,$$

$$\int_{Q_1} v_{n\varepsilon xx}^2 dxdt \le c_3 \int_{Q_1} [(1+\lambda_n^4)f_n^2 + f_{nt}^2]dxdt\,,$$

где постоянные $c_i, i = 1,2,3$ не зависят ε, n.

На основании доказанной леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* $2a - |k_t| \ge \delta > 0$. *Тогда для любой функции* $f_n \in W^{(0,1)}_{2(x,t)}$ *существует единственное решение задачи (3), (4) из* $W^{(2,1)}_{2(x,t)}$, *для которого справедливы оценки из леммы 2.*

Доказательство. Существование решения устанавливается предельным переходом при $\varepsilon \to 0$.

Единственность решения следует из интегрирования по частям выражения

$$\int_{Q_1} (\overline{Mv_n} v_n + Mv_n \overline{v_n})dxdt = 0\,.$$

Теорема доказана.

Далее доказывается справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Если выполнены условия лемм 1, 2 и функция* $f(x,y,t)$ *такова, что*

$$f, f_t, D_y^2 f \in L^2(Q)\,,\ f\big|_{y=0} = f\big|_{y=1} = 0\,,$$

то ряд $u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)\varphi_n(y)$ сходится в $L^2(Q)$ вместе со своими производными первого порядка по t и производными второго порядка по переменным x и y.

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* $2a-|k_t|\ge\delta>0$. *Тогда для любой функции* $f(x,y,t)$, *удовлетворяющей условиям из леммы 3, существует единственное решение задачи (1), (2) из класса* $u,u_t,u_{xx},u_{yy}\in L^2(Q)$.

Доказательство. Существование решения следует из леммы 3, а его единственность из леммы 2.

Аналогичное достаточное условие на коэффициенты возникает при доказательстве существования и единственности решения краевой задачи для следующего класса уравнений смешанного типа.

В цилиндрической области $Q=(0,T)\times D$, где D — ограниченная область в R^n с границей $S\in C^2$, рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv k(x,t)u_t-\Delta u+a(x,t)u=f(x,t), \tag{7}$$

$k(x,0)\le 0$, $k(x,T)\ge 0$, внутри области Q на знак функции $k(x,t)$ не делается никаких предположений. Уравнения вида (7) возникают при описании турбулентных процессов. Для данного уравнения сформулируем краевую задачу.

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t)\big|_{\Gamma}=0, \Gamma=(0,T)\times S. \tag{8}$$

Для задачи (7), (8) доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть $k(x,t),a(x,t)\in C^1(Q)$, $2a-|k_t|\ge\delta>0$. Тогда для любой функции $f(x,t),f_t(x,t)\in L^2(Q)$ существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (7), (8) из пространства $W^{(1,2)}_{2(t,x)}$.

Доказательство. В области Q рассмотрим следующую задачу:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv-\varepsilon u_{\varepsilon tt}-\Delta u+k(x,t)u_{\varepsilon t}+a(x,t)u_\varepsilon=f(x,t), \tag{9}$$

$$u_\varepsilon\big|_{\Gamma}=0, \Gamma=(0,T)\times S,\ u_{\varepsilon t}\big|_{t=0}=u_{\varepsilon t}\big|_{t=T}=0. \tag{10}$$

Разрешимость задачи (9), (10) при $\varepsilon>0$ известна из общей теории эллиптических уравнений. Причем если $f(x,t),f_t(x,t)\in L^2(Q)$, то $u_{\varepsilon t}\in W_2^2(Q)$.

Из тождества

$$\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon u_\varepsilon dQ=\int_Q fu_\varepsilon dQ$$

после интегрирования по частям имеем первую оценку

$$\varepsilon\int_Q u_{\varepsilon t}^2dQ+\int_Q(|\nabla u_\varepsilon|^2+u_\varepsilon^2)dQ\le c_1\int_{Q_1} f^2dQ, \tag{10}$$

где c_i — постоянные, не зависящие от ε.

Далее заметим, что функция $u_{\varepsilon t} = v$ является решением краевой задачи

$$-\varepsilon v_{tt} - \Delta v + (a + k_t)v + kv_t = f_t - a_t u_\varepsilon \equiv f \in L^2(Q)\,, \tag{11}$$

$$v\big|_\Gamma = v\big|_{t=0} = v\big|_{t=T} = 0. \tag{12}$$

Из (11), (12) с учетом первой оценки и тождества

$$\int_Q [-\varepsilon v_{tt} - \Delta v + (a + k_t)v + kv_t]vdQ = \int_Q fvdQ$$

получаем

$$\varepsilon \int_Q v^2 dQ + \int_Q (|\nabla u|^2 + v^2)dQ \le c_2 \int_Q (f^2 + f_t^2)dQ\,. \tag{13}$$

Из оценок (10), (13) и (9), (10) имеем

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n u_{\varepsilon x_i x_j}^2 dQ \le c_3 \int_Q (f^2 + f_t^2]dQ\,. \tag{14}$$

На основе равномерных по $\varepsilon > 0$ оценок (10), (13), (14) заключаем, что из последовательности u_ε можно извлечь подпоследовательность u_{ε_n} такую, что

$$u_{\varepsilon_n} \Rightarrow u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ при } \varepsilon_n \to 0\,,$$

$$u_{\varepsilon_n t} \to u_t \text{ слабо в } L^2(Q) \text{ при } \varepsilon_n \to 0\,,$$

$$u_{\varepsilon_n x_i x_j} \to u_{x_i x_j} \text{ слабо в } L^2(Q) \text{ при } \varepsilon_n \to 0\,.$$

Отсюда следует, что предельная функция u является решением задачи (7), (8).

Теперь докажем единственность данного решения. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи (7), (8), тогда из разности $u = u_1 - u_2$ имеем

$$Lu = 0,\ \ u\big|_\Gamma = 0\,.$$

Из тождества

$$\int_Q LuudQ = \int_Q (|\nabla u|^2 + \frac{2a - k_t}{2}u^2)dQ - \int_S k(x,t)u^2\big|_{t=0} dS + \int_S k(x,t)u^2\big|_{t=T} dS = 0\,.$$

Получаем, что $u \equiv 0$. Таким образом, теорема доказана.

Список литературы

1. *Татарский В. И.* Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 6. С. 2106—2117.

2. *Бубнов Б. А.* Краевая задача для одного класса ультрагиперболических уравнений // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики : сб. науч. тр. / СО АН СССР. Институт математики. Новосибирск, 1981. С. 34—40.

3. *Бубнов Б. А.* Краевая задача для одного класса уравнений, содержащих производную по времени // Доклады АН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1292—1297.

4. *Семягин Н. Б.* Корректность начально-краевой задачи в ограниченной области для одного класса неклассических уравнений // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики : сб. науч. тр. / СО АН СССР. Институт математики. Новосибирск, 1984. С. 130—139.

Об авторе

Алексей Иванович Камышников — д-р техн. наук, канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: AKamyshnikov@kantiana.ru

About author

Dr Alexey Kamyshnikov — ass. prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: AKamyshnikov@kantiana.ru